Find optimum Solution by using Simplex Method

استخدام الطريقة المبسطة في إيجاد الحل الأمثل

محاضرة
مقدمة من قبل
المدرس المساعد
احمد هشام محمد طاهر
قسم الإحصاء – كلية الإدارة والاقتصاد
جامعة البصرة

لتوضيح خطوات إيجاد الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية من نوع (MIN) نأخذ المثال التالي :

Ex: Solve the following LLP using simplex method :

$$Min\ Z = 2X_1 - 3X_2 + 6X_3$$

$$S.T.: \quad 3X_1 - X_2 + 2X_3 \leq 7$$
$$2X_1 + 4X_2 \geq -12$$
$$-4X_1 + 3X_2 + 8X_3 \leq 10$$
$$X_1, X_2, and\ X_3 \geq 0$$

قبل اجراء خطوات الحل الأمثل على مشكلة المبرمجة الخطية نلاحظ المشكلة التالية :

$$Min\ Z = 2X_1 - 3X_2 + 6X_3$$

$$S.T.: \quad 3X_1 - X_2 + 2X_3 \leq 7$$
$$2X_1 + 4X_2 \geq -12$$
$$-4X_1 + 3X_2 + 8X_3 \leq 10$$
$$X_1, X_2, and\ X_3 \geq 0$$

ان القيمة المتاحة للقيد الثاني ($b_2 = -12$)
وعليه نجري التحويل التالي من خلال (*(-1))
وعليه نحصل على النموذج :

$$Min\ Z = 2X_1 - 3X_2 + 6X_3$$

$$S.T.: \quad 3X_1 - X_2 + 2X_3 \leq 7$$
$$-2X_1 - 4X_2 \leq 12$$
$$-4X_1 + 3X_2 + 8X_3 \leq 10$$
$$X_1, X_2, and\ X_3 \geq 0$$

لغرض ايجاد الحل الامثل لمشكلة البرمجة الخطية نتبع الخطوات التالية :

(1) تحويل معاملات دالة الهدف من الطرف الايمن الى الطرف الايسر ..لنحصل على القيمة الابتدائية لدالة الهدف

$$Min\ Z - 2X_1 + 3X_2 - 6X_3 = 0$$

(2) تحويل قيود مشكلة البرمجة الخطية الى معادلات حسب الطريقة القياسية بإضافة متغيرات (Slack Variables) (S_j) :

$$3X_1 - X_2 + 2X_3 + S_1 = 7 \quad \dots (1)$$

$$-2X_1 - 4X_2 + S_2 = 12 \quad \dots (2)$$

$$-4X_1 + 3X_2 + 8X_3 + S_3 = 10 \quad \dots (3)$$

$$Min\ Z - 2X_1 + 3X_2 - 6X_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 0$$

S.T.:

$$3X_1 - X_2 + 2X_3 + S_1 = 7$$

$$-2X_1 - X_2 + S_2 = 12$$

$$-4X_1 + 3X_2 + 8X_3 + S_3 = 10$$

$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2 \text{ and } S_3 \geq 0$$

(3) تكوين جدول الحل الابتدائي

العمود المحوري

Z_j-C_j	-2	3	-6	0	0	0	0
B.V.	X1	X2	X3	S1	S2	S3	b_j
S1	3	-1	2	1	0	0	7
S2	-2	-4	0	0	1	0	12
S3	-4	3	8	0	0	1	10

(4) نحدد المتغير الداخل في الحل (تحديد العمود المحوري)

- ويتم تحديد العمود المحوري من خلال ملاحظة معاملات دالة الهدف للمتغيرات الاساسية X3, X2, X1 .
- وبما ان دالة الهدف هي من نوع (MIN) فيتم اختيار اكبر معامل موجب الإشارة .
- وعليه يكون المتغير الداخل هو X2 والذي معامله (3) .

(5) تحديد المتغير الخارج من الحل S3, S2, S1 من خلال إيجاد متجه $\frac{b_J}{X_B}$ واختيار اقل ناتج قسمة

العمود المحوري

Z_j-C_j	-2	3	-6	0	0	0	0
B.V.	X1	X2	X3	S1	S2	S3	b_j
S1	3	-1	2	1	0	0	7
S2	-2	-4	0	0	1	0	12
S3	-4	3	8	0	0	1	10

الصف المحوري

حيث ان :

$$b_j = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix} \qquad X_B = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \frac{b_J}{X_B} = \begin{bmatrix} 7/-1 \\ 12/-4 \\ 10/3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \frac{b_J}{X_B} = \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 10/3 \end{bmatrix}$$

تهمل
تهمل
يتم اختيارها

ملاحظة اذا كان متجه b_j يحتوي على قيم (سالبة او اصفار) فتهمل عند المقارنة وتؤخذ القيم الموجبة فقط .

وعليه يكون المتغير الخارج من الحل هو S3 المقابلة للقيمة $(10/3)$ وعليه نحدد الصف المحوري

(6)تكوين جدول الحل الأمثل (I)

Z_j-C_j							
B.V.	X1	X2	X3	S1	S2	S3	b_j
S1	1						1
S2	1						1
X3	$\frac{-4}{3}$	1	$\frac{8}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$

- الحصول على عناصر الصف الجديد للمتغير الداخل في الحل X3
- من خلال قسمة جميع عناصر الصف المحوري على عنصر العمود المحوري لذلك الصف (3) .

$$X3 = \left[\frac{-4}{3} \quad \frac{3}{3} \quad \frac{8}{3} \quad \frac{0}{3} \quad \frac{0}{3} \quad \frac{1}{3} \middle| \frac{10}{3}\right]$$

- بعد الحصول على الصف الجديد للمتغير X3 يتم حساب قيم الجدول المتبقة، من خلال تطبيق القاعدة

الصف الجديد لكل حالة = الصف القديم – (معامل العمود المحوري لذلك الصف) * الصف الجديد للمتغير الداخل

Z_j-C_j	2	0	-14	0	0	-1	-10
B.V.	X1	X2	X3	S1	S2	S3	b_j
S1	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{14}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{31}{3}$
S2	$\frac{-22}{3}$	0	$\frac{32}{3}$	0	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{76}{3}$
X3	$\frac{-4}{3}$	1	$\frac{8}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$

ومن نتائج جدول الحل الأمثل (I) نجد ان شرط الامثلية غير متحقق

$Z_J - C_J \leq 0$

وهنا نلاحظ ان $X_1 > 0$

وعليه نستمر بالحل

$Z_J - C_J$

$$X_1 = -2 - (3) * \left(\frac{-4}{3}\right) = 2$$

$$X_2 = 3 - (3) * (1) = 0$$

$$X_3 = -6 - (3) * \left(\frac{8}{3}\right) = -14$$

$$S_1 = 0 - (3) * (0) = 0$$

$$S_2 = 0 - (3) * (0) = 0$$

$$S_3 = 0 - (3) * \left(\frac{1}{3}\right) = -1$$

$$HRS = 0 - (3) * \left(\frac{10}{3}\right) = -10$$

S1

$$X_1 = 3 - (-1) * \left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

$$X_2 = -1 - (-1) * (1) = 0$$

$$X_3 = 2 - (-1) * \left(\frac{8}{3}\right) = \frac{14}{3}$$

$$S_1 = 1 - (-1) * (0) = 1$$

$$S_2 = 0 - (-1) * (0) = 0$$

$$S_3 = 0 - (-1) * \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$b_1 = 7 - (-1) * \left(\frac{10}{3}\right) = \frac{31}{3}$$

S2

$$X_1 = -2 - (-4) * \left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{-22}{3}$$

$$X_2 = -4 - (-4) * (1) = 0$$

$$X_3 = 0 - (-4) * \left(\frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}$$

$$S_1 = 0 - (-4) * (0) = 0$$

$$S_2 = 1 - (-4) * (0) = 1$$

$$S_3 = 0 - (-4) * \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$$b_2 = 12 - (-4) * \left(\frac{10}{3}\right) = \frac{76}{3}$$

تكوين جدول الحل الأمثل (II)

Z_j-C_j	2	0	-14	0	0	-1	-10
B.V.	X1	X2	X3	S1	S2	S3	b_j
S1	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{14}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{31}{3}$
S2	$\frac{-22}{3}$	0	$\frac{32}{3}$	0	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{76}{3}$
X3	$\frac{-4}{3}$	1	$\frac{8}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$

باعتماد نتائج جدول الحل الأمثل (I) نحدد المتغير الداخل والخارج في الحل مع تطبيق كافة الخطوات السابقة .

1- المتغير الداخل هو $X_1 = 2$، اذ ان عناصر المتغير X_1 ستمثل عناصر العمود المحوري .

2- نحدد المتغير الخارج من الحل من خلال تحديد عناصر متجه $\frac{b_J}{X_B}$.

حيث ان :

$$b_j = \begin{bmatrix} \frac{31}{3} \\ \frac{76}{3} \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix} \qquad X_B = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{-22}{3} \\ \frac{-4}{3} \end{bmatrix} \qquad \frac{b_J}{X_B} = \begin{bmatrix} \frac{31}{3} / \frac{5}{3} \\ \frac{76}{3} / \frac{-22}{3} \\ \frac{10}{3} / \frac{-4}{3} \end{bmatrix} \Longrightarrow \frac{b_J}{X_B} = \begin{bmatrix} \frac{31}{5} \\ -\frac{76}{22} \\ -\frac{10}{4} \end{bmatrix}$$

وعليه تهمل القيم السالبة ويتم اختيار القيمة الموجبة $\frac{31}{5}$ المقابلة للمتغير S1، الذي سيمثل المتغير الخارج من الحل وعاصره تمثل الصف المحوري

وسيتم الحصول على نتائج جدول الحل الأمثل (II) من خلال إيجاد عناصر الصف الجديد للمتغير الداخل X_1 مع تطبيق الخطوات السابقة في حساب عناصر جدول الحل الأمثل

Z_j-C_j	0	0	$-\frac{98}{5}$	$-\frac{6}{5}$	0	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{112}{5}$
B.V.	X1	X2	X3	S1	S2	S3	b_j
X_1							$\frac{31}{5}$
S_1			?				?
X_2							?

ومن نتائج جدول الحل الأمثل (I) نجد ان شرط الامثلية متحقق

$Z_J - C_J \leq 0$

اذ نلاحظ ان جميع قيم دالة الهدف هي اقل او تساوي صفر

واجب

اكمل نتائج جدول الحل الامثل ثم تحقق من صحة قيمة دالة الهدف ؟